Lemat Filippova dla inkluzji różniczkowych wyższych rzędów

Andrzej Fryszkowski

Rozpatrujemy nastepujące zagadnienia dla inkluzji różniczkowych wyższych rzędów zdefiniowanych na $[-1,1]$:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_3 y = y''' + k^2 y' \in F(x,y), \\ y(-1) = y'(-1) = y'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

oraz (belka)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_4 y'''' + k^2 y \in F(x,y), \\ y(-1) = y'(-1) = y(1) = y'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Klasyczny Lemat Filippova dotyczy sytuacji na $[0,1]$ :

$$y' \in F(x,y), \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Formułuje się go następująco:

Lemat Filippova: Załóżmy, że $F : [0,1] \times R^n \rightsquigarrow R^n$ jest multifunkcją mierzalną po $x$ oraz lipschitzowską po $y$ ze stałą całkowalną $m \in L^1[0,1]$ tzn. taką, że dla dowolnych $y, z \in R^n$ zachodzi

$$d_H(F(x,y), F(x,z)) \le m(t)|y-z| \quad p.w. \quad w \quad [0,1].$$

Wtedy dla każdej funkcji absolutnie ciągłej $y_0 : [0,1] \to R^n$ takiej, że

$$d_H(y_0'(x), F(x, y_0(x))) \le p(t) \quad p.w. \quad w \quad [0,1] \quad oraz \quad y(0) = y_0,$$

gdzie $p \in L^1[0,1]$, istnieje takie rozwiązanie $y$ zagadnienia (C), że

i.) $|y'(x) - y_0'(x)| \le m(x) \int\limits_0^x p(t) \exp(m(x) - m(t))\, dt + p(x)$

oraz ii.) $|y(x) - y_0(x)| \le \left( \int\limits_0^x p(t) \exp(m(x) - m(t))\, dt \right).$

Konsekwencją powyższego Lematu jest twierdzenie Filippova-Ważewskiego, ktore orzeka, że każde rozwiązanie zagadnienia zrelaksowanego

$$y' \in clcoF(x,y), \quad y(0) = y_0.$$

jest granicą jednostajną rozwiązań (3).

Przeniesienie Lematu Filippova na badane inkluzje jest możliwe, ale przy pewnych dodatkowych założeniach o funkcji $p$. Jest to związane z faktem, że operatory $\mathcal{D}_3$ i $\mathcal{D}_4$ posiadają prawe odwrotne, będące operatorami całkowymi z nieujemnymi funkcjami Greena (mimo tego, że np. $\mathcal{D}_3$ jest antysprzężony). Opisujemy też konstrukcję jąder całkowych pewną ciekawą metodą, która wydaje się być związana ze wzorem rezolwentnym Hilberta.