

Geometria analityczna

1. Odległość punktów w przestrzeni trójwymiarowej.
2. Działania na wektorach.
3. Iloczyn skalarny wektorów.
4. Iloczyn wektorowy wektorów.
5. Iloczyn mieszany wektorów.
6. Pole równoległoboku oraz objętość równoległościanu.
7. Równanie prostej w przestrzeni trójwymiarowej.
8. Równanie płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej.

Przykłady

Zadanie. Oblicz odległość punktów $A = (3, -1, 2)$ i $B = (6, 4, 8)$ w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozwiązanie. Odległość punktów A i B w przestrzeni trójwymiarowej jest równa

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (-1 - 4)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{9 + 25 + 36} = \sqrt{70}.$$

Odpowiedź. Odległość punktów A oraz B w przestrzeni trójwymiarowej wynosi $\sqrt{70}$.

Zadanie. Dla wektorów $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ oraz $\vec{b} = [-1, 4, 3]$ oblicz: $3\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ oraz $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Rozwiązanie. Mamy:

$$\begin{aligned}3\vec{a} &= 6\vec{i} + 12\vec{j} + 18\vec{k} = [6, 12, 18], \\ \vec{a} + \vec{b} &= [2, 4, 6] + [-1, 4, 3] = [1, 8, 9], \\ \vec{a} - \vec{b} &= [2, 4, 6] - [-1, 4, 3] = [3, 0, 3], \\ |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 8^2 + 9^2} = \sqrt{1 + 64 + 81} = \sqrt{146}, \\ |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Odpowiedź. $3\vec{a} = [6, 12, 18]$, $\vec{a} + \vec{b} = [1, 8, 9]$, $\vec{a} - \vec{b} = [3, 0, 3]$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{146}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{2}$.

Zadanie. Określ wzajemne położenie w przestrzeni wektorów $\vec{a} = -3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} + 14\vec{j} + 5\vec{k}$.

Rozwiązanie. Określenie wzajemnego położenia wektorów w przestrzeni sprowadza się do wyznaczenia kąta pomiędzy tymi wektorami. (Zauważmy, iż każde dwa nierównoległe wektory wyznaczają płaszczyznę, dlatego nie ma sensu pytać, czy dane wektory są współpłaszczyznowe, tzn. czy leżą na jednej płaszczyźnie.) Mamy:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 14 + 4 \cdot 5 = 0,$$

a zatem $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Rozwiązanie. Wektory \vec{a} oraz \vec{b} są prostopadłe.

Zadanie. Określ wzajemne położenie w przestrzeni wektorów $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ oraz $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.

Rozwiązanie. Rozpocniemy od zbadania prostopadłości wektorów \vec{a} oraz \vec{b} . Mamy

$$\vec{a} \circ \vec{b} = -2 + 15 + 1 = 14 \neq 0,$$

a zatem dane wektory nie są prostopadłe.

Dwa wektory są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $\lambda \neq 0$ taka, że $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Zauważmy, iż w przypadku wektorów $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ taka stała λ istnieć nie może, gdyż wtedy byłoby

$$2 = -\lambda, \quad 3 = 5\lambda, \quad 1 = \lambda.$$

A więc dane wektory nie są również równoległe.

Wyznamy zatem kąt pomiędzy wektorami \vec{a} oraz \vec{b} . Ponieważ

$$|\vec{a}| = \sqrt{14} \quad \text{oraz} \quad |\vec{b}| = \sqrt{27},$$

więc

$$\cos \theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{42}}{9}.$$

Stąd

$$\theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{42}}{9} \right) \approx 0,77.$$

Odpowiedź. Kosinus kąta θ pomiędzy wektorami \vec{a} oraz \vec{b} wynosi $\frac{\sqrt{42}}{9}$.

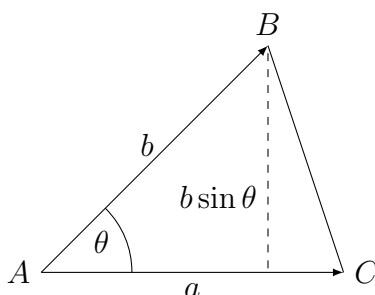
Zadanie. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez punkty $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 4)$ oraz $C = (3, 0, -1)$.

Rozwiązanie. Jeżeli dane są dwa boki trójkąta a , b oraz kąt między nimi θ , to pole trójkąta wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \theta,$$

a zatem pole trójkąta wyznaczonego przez punkty A , B oraz C wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$



Ponieważ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (4-1)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \\ \overrightarrow{AC} &= (3-1)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = 2\vec{i} - 1\vec{j} - 2\vec{k},\end{aligned}$$

więc

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Stąd

$$P = \frac{1}{2}|\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}| = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

Odpowiedź. Pole trójkąta wyznaczonego przez punkty A , B oraz C jest równe $\frac{3}{2}\sqrt{10}$.

Zadanie. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{k}$ oraz $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Rozwiązanie. Objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory \vec{a} , \vec{b} oraz \vec{c} jest równa

$$V = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|.$$

Stąd

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

A zatem $V = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})| = |2| = 2$.

Odpowiedź. Objętość równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} oraz \vec{c} jest równa 2.

Zadanie. Napisz równanie parametryczne prostej \mathcal{L} o wektorze kierunkowym $\vec{a} = [6, 1, -3]$, przechodzącej przez punkt $A = (4, 6, -7)$.

Rozwiązanie. Równanie parametryczne prostej \mathcal{L} o wektorze kierunkowym $\vec{a} = [6, 1, -3]$, przechodzącej przez punkt $A = (4, 6, 7)$ ma postać

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x = 4 + 6t \\ y = 6 + t \\ z = 7 - 3t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Odpowiedź. Równanie parametryczne prostej \mathcal{L} o wektorze kierunkowym $\vec{a} = [6, 1, -3]$, przechodzącej przez punkt $A = (4, 6, 7)$ ma postać: $x = 4 + 6t$, $y = 6 + t$, $z = 7 - 3t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie. Wyznacz równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $A = (2, -1, 8)$ oraz $B = (5, 6, -3)$.

Rozwiązanie. Wektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = [5 - 2, 6 + 1, -3 - 8] = [3, 7, -11]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej \mathcal{L} . Stąd (wykorzystując punkt A)

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 7t \\ z = 8 - 11t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

lub równoważnie (wykorzystując punkt B)

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 6 + 7t \\ z = -3 - 11t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odpowiedź. Równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $A = (2, -1, 8)$ oraz $B = (5, 6, -3)$ ma postać: $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 7t$, $z = 8 - 11t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie. Określ wzajemne położenie w przestrzeni prostych $\mathcal{L}_a: x = -6 - t, y = 20 + 3t, z = 1 + 2t$ oraz $\mathcal{L}_b: x = 5 + 2s, y = -9 - 4s, z = 1 + 7s$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Wektory kierunkowe prostych \mathcal{L}_a oraz \mathcal{L}_b są równe odpowiednio:

$$\vec{a} = [-1, 3, 2], \quad \vec{b} = [2, -4, 7].$$

Ponieważ $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, więc $\mathcal{L}_a \perp \mathcal{L}_b$.

By zbadać, czy proste \mathcal{L}_a oraz \mathcal{L}_b mają punkt przecięcia, rozpatrzmy układ równań (powstały z przyrównania odpowiednich współrzędnych obydwu prostych)

$$\begin{cases} -6 - t = 5 + 2s \\ 20 + 3t = -9 - 4s \\ 1 + 2t = 1 + 7s \end{cases}$$

który jest równoważny z następującym układem

$$\begin{cases} t + 2s = -11 \\ 3t + 4s = -29 \\ 2t - 7s = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując dany układ równań, otrzymujemy $s = -2$ oraz $t = -7$. Podstawiając np. parametr $s = -2$ do wzoru prostej \mathcal{L}_b , stwierdzamy, że proste \mathcal{L}_a i \mathcal{L}_b przecinają się w punkcie $(1, -1, -13)$.

Odpowiedź. Proste \mathcal{L}_a i \mathcal{L}_b są prostopadłe względem siebie, a ponadto przecinają się w punkcie $(1, -1, -13)$.

Zadanie. Znajdź odległość punktu $A = (0, 0, 0)$ od prostej $\mathcal{L}: x = 1 + 2t, y = -2 + 3t, z = 2t$.

Rozwiązanie. Odległość punktu A od prostej \mathcal{L} dana jest wzorem

$$d(A, \mathcal{L}) = \frac{|\vec{r} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|},$$

gdzie \vec{a} jest wektorem kierunkowym prostej \mathcal{L} , a \vec{r} łączy punkt A z dowolnym punktem na prostej \mathcal{L} .

Podstawiając do równania prostej \mathcal{L} parametr $t = 0$, otrzymujemy, iż punkt $B = (1, -2, 0)$ leży na danej prostej. Stąd

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = [1, -2, 0].$$

Ponieważ $\vec{a} = [2, 3, 2]$, więc

$$\vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}.$$

A zatem

$$|\vec{r} \times \vec{a}| = \sqrt{69}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{17},$$

skąd

$$d(A, \mathcal{L}) = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{17}}.$$

Odpowiedź. Odległość punktu A od prostej \mathcal{L} wynosi $\frac{\sqrt{69}}{\sqrt{17}}$.

Zadanie. Napisz równanie płaszczyzny o wektorze normalnym $\vec{n} = [2, -3, 4]$, zawierającej punkt $A = (5, 1, 3)$.

Rozwiązanie. Równanie płaszczyzny o wektorze normalnym $\vec{n} = [2, -3, 4]$, zawierającej punkt $A = (5, 1, 3)$ ma postać

$$2(x - 5) - 3(y - 1) + 4(z - 3) = 0,$$

czyli

$$2x - 3y + 4z - 19 = 0.$$

Odpowiedź. Równanie płaszczyzny o wektorze normalnym $\vec{n} = [2, -3, 4]$, zawierającej punkt $A = (5, 1, 3)$ ma postać $2x - 3y + 4z - 19 = 0$.

Zadanie. Napisz równanie płaszczyzny zawierającej punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (3, 1, 4)$ oraz $C = (2, -2, 0)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = [2, 1, 5] = 2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}, \\ \vec{v} &= \overrightarrow{CB} = [1, 3, 4] = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}. \end{aligned}$$

Zauważmy, iż wektory \vec{u} , \vec{v} leżą w szukanej płaszczyźnie \mathcal{P} , zatem wektor \vec{n} prostopadły do płaszczyzny \mathcal{P} będzie dany wzorem

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Stąd (wykorzystując punkt A)

$$\mathcal{P}: -11(x-1) - 3(y-0) + 5(z+1) = 0$$

lub równoważnie

$$\mathcal{P}: -11x - 3y + 5z + 16 = 0.$$

Odpowiedź. Równanie płaszczyzny zawierającej punkty $A = (1, 0, -1)$, $B = (3, 1, 4)$ oraz $C = (2, -2, 0)$ ma postać $-11x - 3y + 5z + 16 = 0$.

Zadanie. Określ wzajemne położenie w przestrzeni płaszczyzn $\mathcal{P}_1: 2x - 3y + 4z = 1$ oraz $\mathcal{P}_2: x - y - z = 5$.

Rozwiązanie. Wektory normalne płaszczyzn \mathcal{P}_1 oraz \mathcal{P}_2 są równe odpowiednio

$$\vec{n}_1 = [2, -3, 4], \quad \vec{n}_2 = [1, -1, -1].$$

Ponieważ nie istnieje stała $\lambda \neq 0$ taka, że $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$, to wektory te nie są równoległe. (Stała $\lambda \neq 0$ o podanej własności istotnie nie może istnieć, gdyż w przeciwnym przypadku spełniałaby ona układ równań $2 = \lambda$, $-3 = -\lambda$, $4 = -\lambda$.)

Płaszczyzny \mathcal{P}_1 oraz \mathcal{P}_2 nie są prostopadłe, gdyż

$$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 2 + 3 - 4 = 1 \neq 0.$$

Ponieważ

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{29} \quad \text{oraz} \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{3},$$

więc

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{87}},$$

gdzie θ oznacza kąt między płaszczyznami \mathcal{P}_1 oraz \mathcal{P}_2 .

Prote \mathcal{P}_1 oraz \mathcal{P}_2 nie są równoległe, a zatem przecinają się wzdłuż prostej. Wyznamy jej równanie. Przyjmując $z = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest parametrem, rozwiązujemy pomocniczy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - 4t \\ x - y = 5 + t \end{cases}$$

Otrzymane rozwiązanie jest szukanym równaniem prostej

$$\begin{cases} x = 14 + 7t \\ y = 9 + 6t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odpowiedź. Płaszczyzny \mathcal{P}_1 oraz \mathcal{P}_2 przecinają się wzdłuż prostej: $x = 14 + 7t$, $y = 9 + 6t$, $z = t$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$) pod kątem, którego kosinus jest równy $\frac{1}{\sqrt{87}}$.

Zadanie. Znajdź odległość punktu $A = (0, 0, 0)$ od płaszczyzny \mathcal{P} : $4x - 4y - 2z + 8 = 0$.

Rozwiązanie. Odległość punktu A od płaszczyzny \mathcal{P} dana jest wzorem

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{r} \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

gdzie \vec{n} jest wektorem normalnym płaszczyzny \mathcal{P} , a \vec{r} łączy punkt A z dowolnym punktem na płaszczyźnie \mathcal{P} .

Zauważmy, iż punkt $B = (0, 0, 4)$ leży na płaszczyźnie \mathcal{P} (współrzędne x, y obieramy dowolnie, a współrzędną z wyznaczamy z równania płaszczyzny). Wtedy

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = [0, 0, 4].$$

Ponieważ $\vec{n} = [4, -4, -2]$, więc $\vec{r} \circ \vec{n} = -8$ oraz

$$|\vec{r} \circ \vec{n}| = 8, \quad |\vec{n}| = \sqrt{36} = 6.$$

Stąd

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Odpowiedź. Odległość punktu punktu A od płaszczyzny \mathcal{P} jest równa $\frac{4}{3}$.

Zadanie. Znajdź odległość punktu $A = (0, 0, 0)$ od płaszczyzny \mathcal{P} : $4x - 4y - 2z + 8 = 0$.

Rozwiązanie. Na podstawie wzoru wyprowadzonego na wykładzie odległość punktu o współrzędnych $A(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny \mathcal{P} o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ dana jest wzorem

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

A zatem

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{36}} = \frac{4}{3}.$$

Odpowiedź. Odległość punktu punktu A od płaszczyzny \mathcal{P} jest równa $\frac{4}{3}$.

Zadania

Zadanie 1. Oblicz odległość punktów A i B w przestrzeni trójwymiarowej, jeżeli:

(a) $A = (-3, 4, 5)$, $B = (2, -1, 3)$;

(b) $A = (1, -1, 3)$, $B = (-2, -3, 5)$.

Zadanie 2. Dla wektorów $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ oraz $\vec{b} = [-2, 1, 3]$ oblicz:

(a) $3\vec{a}$;

(b) $\vec{a} + \vec{b}$;

(c) $\vec{a} - \vec{b}$;

(d) $|\vec{a} + \vec{b}|$;

(e) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Zadanie 3. Określ wzajemne położenie w przestrzeni wektorów \vec{a} i \vec{b} , gdy

(a) $\vec{a} = [3, -2, 5]$ oraz $\vec{b} = -9\vec{i} + 6\vec{j} - 15\vec{k}$;

(b) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ oraz $\vec{b} = [1, 2, -1]$;

(c) $\vec{a} = [3, 0, -1]$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$;

(d) $\vec{a} = 4\vec{j} + 4\vec{k}$ oraz $\vec{b} = [2, 1, 1]$.

Zadanie 4. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez punkty A , B i C , jeśli:

(a) $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 2, 1)$ oraz $C = (2, 0, 2)$;

(b) $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 1, 2)$ oraz $C = (2, 1, 1)$.

Zadanie 5. Oblicz objętość równoległościanu wyznaczonego przez wektory \vec{a} , \vec{b} oraz \vec{c} , jeśli:

(a) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$;

(b) $\vec{a} = [-3, 2, -1]$, $\vec{b} = [-1, 2, 1]$, $\vec{c} = [1, 1, -5]$.

Zadanie 6. Napisz równanie parametryczne prostej \mathcal{L} o wektorze kierunkowym \vec{a} , przechodzącej przez punkt A , jeśli:

- (a) $A = (3, 5, -3)$ oraz $\vec{a} = [1, 3, 4]$;
- (b) $A = (-1, 7, 4)$ oraz $\vec{a} = [0, 8, 7]$;
- (c) $A = (0, 1, 2)$ oraz $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$;
- (d) $A = (0, 0, 0)$ oraz $\vec{a} = 12\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k}$.

Zadanie 7. Znajdź równanie parametryczne prostej \mathcal{L} przechodzącej przez punkty:

- (a) $A = (2, 3, 4)$ oraz $B = (-1, 2, 3)$;
- (b) $A = (-5, 3, 1)$ oraz $B = (-6, 2, 4)$;
- (c) $A = (-3, 5, 8)$ oraz $B = (-3, 4, 0)$;
- (d) $A = (2, -1, 3)$ oraz $B = (7, 8, 5)$.

Zadanie 8. Określ wzajemne położenie w przestrzeni prostych \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 (tzn. sprawdź czy proste się przecinają oraz wyznacz, jeśli to możliwe, punkt przecięcia, a ponadto określ kąt między prostymi), gdy

- (a) $\mathcal{L}_1: x = 2 - 3t, y = 3 - 4t, z = -5 + 2t$ oraz $\mathcal{L}_2: x = -1 + 9s, y = -1 + 12s, z = -3 - 6s$;
- (b) $\mathcal{L}_1: x = 6, y = 2 + 4t, z = 1 + 2t$ oraz $\mathcal{L}_2: x = 1 + 5s, y = -4 - 2s, z = 3 + 4s$;
- (c) $\mathcal{L}_1: x = 6 - 2t, y = 1 + 3t, z = 2 - 4t$ oraz $\mathcal{L}_2: x = -1 + 5s, y = 2 + 2s, z = -2$;
- (d) $\mathcal{L}_1: x = 1 - t, y = 5t, z = 2 - 2t$ oraz $\mathcal{L}_2: x = 9 - 7s, y = 15, z = 1 - 3s$.

Zadanie 9. Znajdź odległość punktu A od prostej \mathcal{L} , jeśli:

- (a) $A = (-1, 1, 0)$ oraz $\mathcal{L}: x = -3 - t, y = -2 + 2t, z = 1 - 2t$;
- (b) $A = (0, 1, 3)$ oraz $\mathcal{L}: x = 1 - 3t, y = -2, z = 2 + t$;
- (c) $A = (1, 3, -2)$ oraz $\mathcal{L}: x = -3 + 8t, y = -2 + 10t, z = -1 - 2t$;
- (d) $A = (0, 0, 0)$ oraz $\mathcal{L}: x = 1 - 2t, y = -1 + 3t, z = 2 + 2t$.

Zadanie 10. Napisz równanie płaszczyzny o wektorze normalnym \vec{n} , zawierającej punkt A , jeśli

(a) $A = (-3, 4, 3)$ oraz $\vec{n} = [-1, 0, 1]$;

(b) $A = (-3, 2, 1)$ oraz $\vec{n} = [5, 7, 6]$;

(c) $A = (0, 5, 3)$ oraz $\vec{n} = \vec{j} + 3\vec{k}$;

(d) $A = (5, -2, 7)$ oraz $\vec{n} = 8\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Zadanie 11. Napisz równanie płaszczyzny zawierającej podane punkty

(a) $A = (2, 3, 1)$, $B = (3, 4, 2)$, $C = (2, 4, -1)$;

(b) $A = (5, 6, 7)$, $B = (5, 9, 9)$, $C = (6, 7, 8)$;

(c) $A = (0, 2, 2)$, $B = (-1, 1, 2)$, $C = (2, 2, -1)$;

(d) $A = (1, 1, -1)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (2, 3, -2)$.

Zadanie 12. Określ wzajemne położenie w przestrzeni płaszczyzn \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 (tzn. sprawdź czy płaszczyzny się przecinają oraz wyznacz, jeśli to możliwe, prostą przecięcia, a ponadto znajdź kąt pomiędzy płaszczyznami), gdy:

(a) $\mathcal{P}_1: -x - 3y + 2z - 4 = 0$ oraz $\mathcal{P}_2: -x + y + z - 4 = 0$;

(b) $\mathcal{P}_1: -x + y - z + 2 = 0$ oraz $\mathcal{P}_2: 2x - y - z - 4 = 0$;

(c) $\mathcal{P}_1: -2x + y - 3z - 5 = 0$ oraz $\mathcal{P}_2: 4x - 2y + 6z - 4 = 0$;

(d) $\mathcal{P}_1: 2x - 3z + 4 = 0$ oraz $\mathcal{P}_2: 4x - 6y + 4 = 0$.

Zadanie 13. Znajdź odległość punktu A od płaszczyzny \mathcal{P} , jeśli

(a) $A = (0, 0, 0)$ oraz $\mathcal{P}: 6x + 8z - 1 = 0$;

(b) $A = (2, 8, 5)$ oraz $\mathcal{P}: x - 2y - 2z - 1 = 0$;

(c) $A = (3, -1, -2)$ oraz $\mathcal{P}: x + 2y - z - 3 = 0$;

(d) $A = (3, -2, 7)$ oraz $\mathcal{P}: 4x - 6y + z - 5 = 0$.

Odpowiedzi

Zadanie 1 (a) $3\sqrt{6}$; (b) $\sqrt{17}$.

Zadanie 2 (a) $[9, -6, 15]$; (b) $[1, -1, 8]$; (c) $[5, -3, 2]$; (d) $\sqrt{66}$; (e) $\sqrt{38}$.

Zadanie 3 (a) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; (b) $\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{15}}$; (c) $\vec{a} \perp \vec{b}$; (d) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 4 (a) $\sqrt{5}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 5 (a) 9; (b) 28.

Zadanie 6 (a) $\mathcal{L}: x = 3 + t, y = 5 + 3t, z = -3 + 4t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
 (b) $\mathcal{L}: x = -1, y = 7 + 8t, z = 4 + 7t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
 (c) $\mathcal{L}: x = 6t, y = 1 + 8t, z = 2 - 4t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
 (d) $\mathcal{L}: x = 12t, y = -8t, z = 3t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 7 (a) $\mathcal{L}: x = 2 - 3t, y = 3 - t, z = 4 - t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
 (b) $\mathcal{L}: x = -5 - t, y = 3 - t, z = 1 + 3t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
 (c) $\mathcal{L}: x = -3, y = 5 - t, z = 8 - 8t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
 (d) $\mathcal{L}: x = 2 + 5t, y = -1 + 9t, z = 3 + 2t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8 (a) $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, proste pokrywają się; (b) $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, proste nie przecinają się;
 (c) proste $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ przecinają się w punkcie $(4, 4, -2)$ pod kątem θ , takim że $\cos \theta = -\frac{4}{29}$; (d) proste $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ nie przecinają się; ich wektory kierunkowe tworzą kąt θ taki, że $\cos \theta = \frac{13}{2\sqrt{435}}$.

Zadanie 9 (a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; (b) $\frac{\sqrt{47}}{\sqrt{5}}$; (c) 0; (d) $\frac{\sqrt{101}}{\sqrt{17}}$.

Zadanie 10 (a) $-x + z - 6 = 0$; (b) $5x + 7y + 6z - 5 = 0$; (c) $y + 3z - 14 = 0$;
 (d) $8x - y + 2z - 56 = 0$.

Zadanie 11 (a) $-3x + 2y + z - 1 = 0$; (b) $x + 2y - 3z + 4 = 0$; (c) $3x - 3y + 2z + 2 = 0$;
 (d) $x + z = 0$.

Zadanie 12 (a) $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$; płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej $x = -4 + 5t, y = t, z = 4t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (b) płaszczyzny $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ przecinają się wzdłuż prostej $x = 2 + 2t, y = 3t, z = t$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$) pod kątem θ takim, że $\cos \theta = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$; (c) $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$; płaszczyzny nie przecinają się;
 (d) płaszczyzny $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ przecinają się wzdłuż prostej $x = -2 + 3t, y = -\frac{2}{3} + 2t, z = 2t$ (gdzie $t \in \mathbb{R}$) pod kątem θ takim, że $\cos \theta = \frac{4}{13}$.

Zadanie 13 (a) $\frac{1}{10}$; (b) $\frac{25}{3}$; (c) 0; (d) $\frac{26}{\sqrt{53}}$.